

Polinomios de Chebyshev del Primer Tipo: Fundamentos Teóricos y Aplicaciones

Chebyshev Polynomials: Theoretical Foundations and Applications

Viktoriya Belianskaya ¹✉ • Apolonia Rodríguez Gonzales ¹ • Philippe Savoye ² • Mirna Villegas Poquechoque ³

Recibido: 11 Marzo 2024 / Revisado: 6 Mayo 2024 / Aceptado: 16 Mayo 2024 / Publicado: 18 Noviembre 2024

Resumen

En este artículo, se describe como la solución por series de la ecuación de Chebyshev puede elucidar algunos conceptos fundamentales relacionados con las funciones especiales. Se diserta sobre esos temas con el respaldo de una búsqueda de la literatura científica relacionada con el tema propuesto, habiendo examinado numerosos textos y artículos en revistas indizadas. En particular, se verifica que la ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev permite la aproximación de ciertas funciones transcendentales mediante sumas parciales de series de Chebyshev con niveles de precisión relativamente elevados. Se utilizan los sistemas de computación algebraica Mathematica, Maxima y MAPLE para obtener aproximaciones numéricas requeridas para hallar los coeficientes de las series de polinomios de Chebyshev. Al subrayar algunas ventajas de tal procedimiento para representar a funciones aperiódicas y no aleatorias sobre un intervalo finito, se aclara que los métodos descritos en este artículo no pueden ser utilizados directamente fuera de este contexto. Se demuestra que las sumas parciales de series de Maclaurin y Taylor no necesariamente representan los polinomios óptimos para aproximar a una función transcendental sobre un intervalo determinado, de esa manera poniendo de relieve una de las ventajas

pedagógicas de incluir a esos temas en los cursos de matemáticas aplicadas. Se resume la importancia de las series de Chebyshev en el procesamiento de señales, en el estudio de la macroeconomía, en la ciencia de la información, en la tomografía y en varias otras aplicaciones.

Palabras claves: Ecuación diferencial, Serie infinita, Ortogonalidad, Aproximación.

Apolonia Rodríguez Gonzales

<https://orcid.org/0000-0001-9416-9787>

Philippe Savoye

<https://orcid.org/0009-0001-4071-7028>

Mirna Villegas Poquechoque

<https://orcid.org/0009-0000-1039-4259>

✉ Viktoriya Belianskaya / belianskaya.viktoriya@usfx.bo
<https://orcid.org/0009-0008-8930-4145>

- 1 Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad San Francisco Xavier de Chuquisaca, Bolivia.
- 2 Department of Mathematics, Computer Science and Digital Forensics, Commonwealth University, EEUU
- 3 Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad San Francisco Xavier de Chuquisaca, Bolivia.

Abstract

In this article, we describe how the series solution of Chebyshev's equation can elucidate fundamental concepts related to special functions. This analysis was supported by an extensive review of academic literature that was related to this topic; a large number of texts and articles from refereed journals were examined. In particular, it is verified that the orthogonality of the Chebyshev polynomials allows one to approximate certain transcendental functions through partial sums of Chebyshev series with relatively high levels of accuracy. The computer algebra systems Mathematica, Maxima and MAPLE is used in generating the numerical approximations that were needed in determining the coefficients of the Chebyshev series expansions of various functions. Whereas the computational advantages of representing nonperiodic, deterministic functions through Chebyshev series are illustrated through various examples, it is clarified that the methods presented in this article cannot be applied directly outside of this context. One of the primary pedagogical benefits of covering this topic in applied mathematics courses is underscored by illustrating how the partial sums of a transcendental function's Maclaurin or Taylor series do not necessarily represent the optimal polynomials for representing such a function over a given interval. The importance of Chebyshev series in signal processing, macroeconomics, information science, tomography and numerous other applications is summarized.

Keywords: Differential equations, Infinite series, Orthogonality, Approximation.

Introducción

Las funciones especiales, definidas como soluciones de ecuaciones diferenciales o integrales consideradas como esenciales en el análisis matemático, juegan un papel de suma importancia

en las matemáticas aplicadas, la ciencia y muchas especialidades de ingeniería.

Las funciones especiales que son soluciones de ecuaciones diferenciales incluyen las funciones de Laguerre, que satisfacen la ecuación

$$xy'' + (\gamma + 1 - x)y' + \lambda y = 0, \quad x > 0, \quad \gamma, \lambda \in \mathbb{R};$$

las funciones de Legendre, que satisfacen la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(1 + \gamma)y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad \gamma \in \mathbb{R};$$

las funciones de Hermite, que satisfacen la ecuación

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x > 0, \quad \gamma, \lambda \in \mathbb{R};$$

las funciones de Bessel, que satisfacen la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \gamma^2)y = 0, \quad x > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

y las funciones de Chebyshev, que satisfacen la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

(Berthelin, 2017) y (Groux y Soulat, 2009).

La representación de funciones por series de funciones especiales abre la posibilidad de resolver varios problemas fundamentales en la física matemática. Por ejemplo, la solución de la ecuación de la onda lineal sobre un dominio circular puede ser representada por la doble-serie de Fourier-Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} J_k(\sqrt{\gamma_{kl}} r) \cos(k\varphi) \cos(\nu \sqrt{\gamma_{kl}} t),$$

donde $\{J_k(r)\}_{n=0}^{\infty}$ denota el conjunto de funciones de Bessel del primer tipo que satisfacen la ecuación diferencial (1) con $\gamma = k$, la constante ν denota la velocidad de la onda y las constantes γ_{kl} denotan los valores característicos del problema de condición de frontera de Dirichlet correspondiente en el

cual se precisa la condición de frontera mediante la variable dependiente (Tchaptchié, 2024). Las representaciones de la fórmula (3) también son de gran utilidad para el procesamiento de señales no estacionarias, cuya media y varianza son variables en el tiempo (Chaudhary et al, 2023). Las ventajas pedagógicas de incluir este contenido y temas relacionados en el currículo de cursos de matemáticas aplicadas fueron descritas en algunos artículos (Deal y Jiang, 2018), (Fadel et al, 2023) y (Fay y Kloppers, 2010).

De manera similar, algunos autores han esbozado como se puede abarcar el tema de las funciones de Chebyshev en cursos de ecuaciones diferenciales y análisis, elucidando su utilización como herramienta para resolver problemas de investigación (Ivy, 2018), (Merino, 2018) y (Boelkins y Wells, 2007). En este artículo, se profundizan las bases teóricas del desarrollo de ciertas funciones en series de funciones de Chebyshev, destacando las ventajas numéricas de dichas representaciones en series e identificando algunas limitaciones de la aplicación directa de este procedimiento para funciones que no satisfacen determinadas restricciones.

En el libro por Boyce & DiPrima (2005) y varios otros utilizados en cursos elementales de ecuaciones diferenciales, se plantea el problema de resolver la ecuación diferencial de Chebyshev (2) mediante series cerca del punto ordinario $x_0=0$.

Sustituyendo la representación $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en (2), se obtiene

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 .$$

A raíz de algunas simplificaciones, esa ecuación se reduce a

$$2a_2 + n^2 a_0 + (6a_3 + (n^2 - 1)a_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n^2 - k^2)a_k]x^k = 0 .$$

Dado que la serie trivial

$$0+0 \cdot x+0 \cdot x^2+\dots+0 \cdot x^n+\dots=0$$

es la única serie que converge a cero para todo x en el intervalo $-1 < x < 1$, se resuelve que

$$a_2 = -\frac{n^2 a_0}{2!},$$

$$a_3 = -\frac{(n^2 - 1)a_1}{3!}$$

y

$$a_{k+2} = -\frac{(n^2 - k^2)a_k}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 2,3,4,5, \dots \quad (4)$$

La sustitución de los valores $k=2,3,4,5,\dots$ en la relación recursiva (4) permite hallar algunos coeficientes:

$$a_4 = \frac{n^2(n^2-4)a_0}{4!},$$

$$a_5 = \frac{(n^2-1)(n^2-9)a_1}{5!},$$

$$a_6 = -\frac{n^2(n^2 - 4)(n^2 - 16)a_0}{6!}$$

y

$$a_7 = -\frac{n^2(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)a_1}{7!}.$$

La solución general de la ecuación de Chebyshev puede ser escrita de la forma

$$y(x)=a_0 \phi(x)+a_1 \psi(x),$$

donde

$$\phi(x) = 1 - \frac{n^2}{2!}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}x^6 + R_\phi,$$

$$\psi(x) = x - \frac{(n^2-1)}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!}x^5 - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{7!}x^7 + R_\psi$$

y las expresiones R_ϕ y R_ψ podrían incluir términos adicionales, dependiendo del valor de n. Una característica particular de la ecuación de Chebyshev es que sus soluciones siempre resultan ser *polinomios* en vez de funciones representadas por *series infinitas*.

Las primeras iteraciones son

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 - 2x^2, \quad y_3(x) = x - \frac{4}{3}x^3,$$

$$y_4(x) = 1 - 2x^2 + 8x^4, \quad y_5(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{5}x^5, \dots$$

La ecuación de Chebyshev puede ser resuelta de manera más directa a través de la sustitución

$$x = \cos(\theta), \quad (5)$$

por la cual se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\theta^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{d\theta}$$

Sustituyendo esos resultados en (2), se obtiene la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \left[\frac{d^2y}{d\theta^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{d\theta} \right] - x \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + n^2y = 0,$$

que adquiere la forma más sencilla

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación diferencial (2) puede ser descrita de la forma

$$y(\theta) = K_1 \cos(n\theta) + K_2 \sin(n\theta)$$

$$= K_1 \cos(n \cos^{-1}(x)) + K_2 \sin(n \sin^{-1}(x)).$$

Las funciones $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$ y $U_n(x) = \sin(n \sin^{-1}(x))$ son las funciones de Chebyshev del primer y segundo tipo, respectivamente. Las funciones $T_n(x)$ resultan ser polinomios; sustituyendo $n=0, 1$ y 2 , por ejemplo, se verifica que

$$T_0(x) = y_0(x) = 1, \quad T_1(x) = y_1(x) = x \quad \text{y} \quad T_2(x) = -y_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Mediante el uso de identidades trigonométricas, se obtienen los polinomios

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad \text{y} \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Los polinomios con índices impares son funciones impares y los polinomios con índices pares son funciones pares; los polinomios $y_n(x)$ que fueron hallados al resolver la ecuación diferencial (2) pueden ser escritos como combinaciones lineales de funciones del conjunto $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (Berthelin, 2017).

Las condiciones de ortogonalidad

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m \neq n \\ 2 & \text{si } m = n = 0 \\ 1 & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \text{ o } mn = 0 \end{cases}$$

pueden ser demostradas mediante el uso de identidades trigonométricas, y permiten hallar los coeficientes a_k y b_k de la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (7)$$

de una función f que es cíclica con periodo 2π .

Por ejemplo, el coeficiente b_m puede ser hallado al multiplicar (7) por $\sin(mx)$, integrando a ambos lados de la ecuación desde $-\pi$ a π y dividiendo por π , llevándolo a la fórmula

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x) \sin(mx) dx. \quad (8)$$

El resultado (8) puede ser enunciado en la forma

$$b_m = \langle f(x), \sin(mx) \rangle,$$

donde el producto interno $\langle f(x), g(x) \rangle$ de dos funciones que pueden ser desarrolladas en sus series de Fourier se define por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x) g(x) dx.$$

La constante $k(x)=1$ es la función de base para el operador diferencial lineal $L = \frac{d^2}{dx^2} + n^2$ en esa definición (Savoye, 2015).

Se examina la posibilidad de desarrollar una función f de una variable real en una serie infinita de funciones de Chebyshev del primer tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_n(x). \quad (9)$$

Realizando la sustitución (5), se deduce que $\pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\theta$. Desarrollando la integral definida correspondiente, se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^0 \cos(mx) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_m(x) T_n(x) dx - \int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_m(x) T_n(x) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_m(x) T_n(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicando la condición (6), obtenemos el resultado

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

El resultado (10) podría ser interpretado como la condición de ortogonalidad

$$\langle T_m(x), T_n(x) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

donde el producto interno $\langle f(x), g(x) \rangle$ se define como

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot f(x)g(x) dx$$

para el operador diferencial lineal $L = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} + n^2$ en la cual la función de base es

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Los valores de los coeficientes α_n de la serie en (9) pueden ser determinados de manera similar a los coeficientes Fourier de la serie en (7) que fueron hallados en Savoye (2017). Para encontrar el primer coeficiente α_0 , se multiplica la serie en (9) por $\frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Integrando a ambos lados de la ecuación de -1 a 1, se obtiene

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_0(x) T_n(x) dx.$$

La convergencia de series de la forma en (9) es uniforme (Stakgold, 1979). Por consiguiente, se obtiene la ecuación

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{-1}^1 T_0(x) T_n(x) dx.$$

Aplicando la condición de ortogonalidad (10), se puede hallar el coeficiente inicial utilizando la formula

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (11)$$

Por un procedimiento casi idéntico en el cual se multiplica a la ecuación (9) por $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, integrando a ambos lados desde $x=-1$ a 1 , aprovechándose de la convergencia uniforme de la serie correspondiente y de la ortogonalidad de las funciones de Chebyshev de primer tipo, se deduce la manera de hallar el enésimo coeficiente por la fórmula

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Cabe observar que las fórmulas (11) y (12) representan integrales impropias, dado que la función $\frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ no está definida en los límites del intervalo $[-1,1]$.

Materiales y métodos.

Para la presente revisión bibliográfica, se consultaron libros de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, análisis funcional, la teoría de los operadores y el análisis aplicado, tales como: *Équations Differentielles. Collection Enseignement des Mathematiques* por Berthelin (2017), *Introduction Aux Équations Aux Dérivées Partielles: COURS DE MASTER Ière ANNÉE* por Tchaptchié (2024) y *Green's Functions and Boundary Value problems* por Stakgold (1979). También se realizó una búsqueda exhaustiva en bases de datos bibliográficos

como MathSciNet, Google Scholar, Scifinder, Scopus, Ebsco, Zentralblatt fur Mathematik / Mathematics Abstracts, arXiv, JSTOR, Eric y Wolfram/Alpha, utilizando palabras clave en inglés y francés “optimal convergence on a finite interval”, “les opérateurs linéaires bornés et non bornés”, “interpolation numérique via les polynômes de Chebychev” y “fonctions spéciales, polynômes orthogonaux et convergence optimale”. Varias revistas indizadas, como Missouri Journal of Mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Mathematics AMATYC Educator, Primus, Mathematics and Computer Education Journal, Computational Economics, College Mathematics Journal e International Journal for Technology in Mathematics Education, fueron consultadas.

El análisis de funciones de una variable real y la teoría de los operadores lineales se utilizaron para desarrollar los métodos operativos. Los métodos de integración numérica se implementaron con los sistemas de computación algebraica *Mathematica*, *Maxima* y *MAPLE*.

El intervalo $-1 < x < 1$ fue escogido como dominio para todos los problemas propuestos, dado que la parametrización

$$x(z) = 2 \frac{z - a}{b - a} - 1$$

es un isomorfismo desde el intervalo $a < z < b$ al intervalo $-1 < x < 1$ por todos los números reales a y b . Se examinaron las gráficas de las sumas parciales de varias series de Chebyshev y de las funciones transcendentales que son representadas por esas series, confirmando de esa manera las similitudes entre las gráficas cuando se utilizan aproximaciones con polinomios de Chebyshev hasta cuarto ($n=4$) grado.

Dichas gráficas son producidas utilizando la herramienta virtual www.desmos.com.

Resultados

En el sitio web de la *Université Virtuelle de Tunis*, se desarrolla la función $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en su serie infinita de funciones Chebyshev del primer tipo (*Université Virtuelle de*, 2022). En los siguientes dos ejemplos, se obtienen las series de Chebyshev de forma (9) de dos funciones transcendentales utilizando las fórmulas (11) y (12) para hallar los coeficientes α_n .

Ejemplo 1: $h(x) = \sin^{-1}(x)$.

Como la función es impar, se puede ver que

$$\alpha_{2m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Entonces, para hallar los coeficientes α_1 y α_3 , las integrales indefinidas $I_1 = \int \frac{x \sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ y $I_2 = \int \frac{x^3 \sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ son importantes. Mediante la sustitución $w = \sin^{-1}(x)$, se verifica que $I_1 = \int w \sin(w) dw$.

Al aplicar la integración por partes, se confirma que $I_1 = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1}(x) + x + c$. Un procedimiento similar puede ser utilizado para obtener el resultado

$$I_2 = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1}(x) + \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \sin^{-1}(x) + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^3 + C.$$

Esos resultados permiten verificar que

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{-c}^c \frac{x \sin^{-1}(x)}{x} dx = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{-c}^c \frac{x^3 \sin^{-1}(x)}{x} dx = \frac{14}{9}.$$

Se puede utilizar el resultado (12) para hallar los dos primeros coeficientes, verificando que

$$\alpha_1 = \frac{4}{\pi} \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \frac{4}{9\pi}.$$

Por consiguiente, la serie de Chebyshev de la función h es

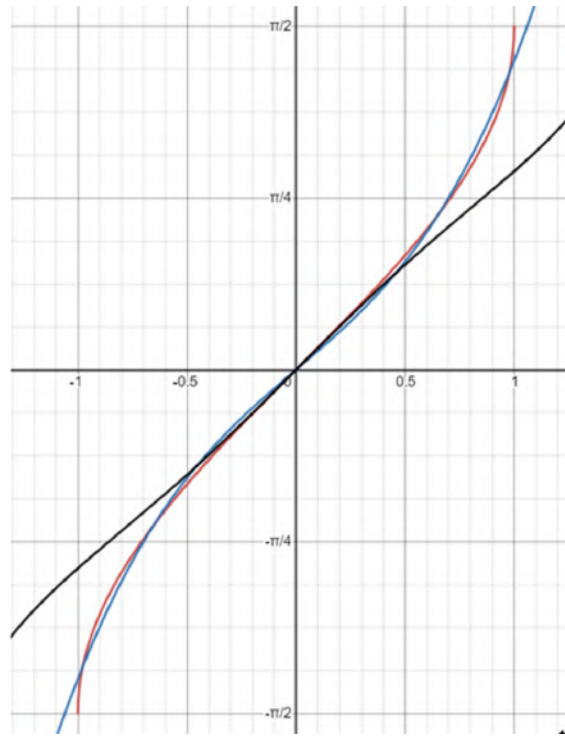
$$h(x) = \frac{4}{\pi}x + \frac{4}{9\pi}(4x^3 - 3x) + \dots$$

La representación (13) ofrece algunas ventajas sobre la serie Maclaurin de la función h .

$$h(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

En la figura 1, se presentan las gráficas de $y(x) = \sin^{-1}(x)$ (rojo), la suma parcial de la serie de Chebyshev $c_3(x) = \frac{4}{\pi}x + \frac{4}{9\pi}(4x^3 - 3x)$ (azul) y la suma parcial de la serie de Maclaurin $M_5(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$ (negro).

Figura 1. Gráfica de la función trigonométrica inversa $y(x)=\sin^{-1}(x)$ (color rojo), su aproximación con un polinomio de Chebyshev $C_3(x)=\frac{4}{\pi}x+\frac{4}{9\pi}(4x^3-3x)$ (color azul) y su aproximación con un polinomio de Maclaurin $M_5(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5$ (color negro) obtenida con la calculadora gráfica www.desmos.com



Examinando las gráficas en la Figura 1, se puede constatar, que el polinomio de tercer grado obtenido al truncar la serie de Chebyshev de la función h genera una mejor aproximación de la función arc seno sobre el intervalo $-1 < x < 1$ que el polinomio de quinto grado que es una suma parcial de la serie de Maclaurin correspondiente. Eso demuestra las ventajas de las series de Chebyshev como herramienta numérica; se generan mayores niveles de precisión utilizando un polinomio de menor grado.

Las integrales utilizadas en (11) y (12) para hallar los coeficientes α_n pueden ser no elementales para ciertas funciones f . En el siguiente ejemplo, se recurre a métodos de integración numérica para hallar las integrales definidas correspondientes.

Ejemplo 2: $w(x)=\cosh(x)$.

Como la función w es par, se puede constatar que

$$\alpha_{(2m+1)}=0, \quad m=0,1,2,3,\dots$$

Las tres integrales impropias

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad I_5 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \cosh(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{e} \quad I_6 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 \cosh(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

son de interés especial. Observando que la función $\frac{\cosh(1)}{\sqrt{1-x^2}}$ es una cota superior sobre el intervalo $-1 < x < 1$ para expresiones de la forma $\frac{x^{2m} \cosh(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, se puede calcular el valor principal de Cauchy de la integral impropia $\int_{-1}^1 \frac{\cosh(1)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ siguiendo un procedimiento descrito en Gourdon (2020), verificando que

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{\cosh(1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\cosh(1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cosh(1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(x) \Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} = \pi \cosh(1).$$

Al constatar que la integral impropia $\int_{-1}^1 \frac{\cosh(1)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge a $\pi \cosh(1)$, se confirma la convergencia de las integrales impropias I_4, I_5 y I_6 .

Como las integrales indefinidas de la forma $\int \frac{x^{2m} \cosh(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ no son elementales, se utilizan algunas herramientas tecnológicas para hallar los valores aproximados a los cuales convergen las integrales

impropias I_1, I_2 y I_3 . El valor de la integral impropia I_1 es la suma de los valores principales de Cauchy de las integrales impropias $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ y $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

El sitio web <https://www.calculadora-de-integrales.com/> es una interfaz de usuario para calcular integrales con el sistema de computación algebraica gratuito *Maxima*, que fue desarrollado por el Instituto de Tecnología de Massachussets (MIT).

Dicho sistema de computación algebraica contiene un conjunto de paquetes de integración

numérica conocido como QUADPACK.

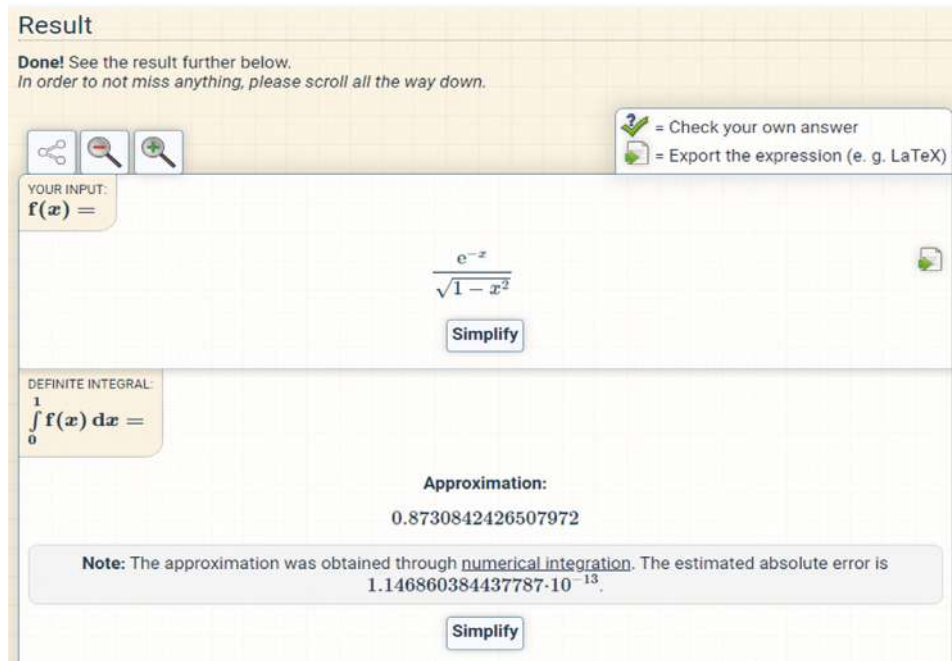
QUADPACK se compone de algoritmos de cuadratura que ajustan la longitud de los subintervalos de una partición en función de las características locales de la gráfica de una función (Demeyer, 2011) y (Shen, 2019). Los valores aproximados obtenidos utilizando *Maxima* (Figuras 2 y 3) mediante la herramienta virtual <https://www.calculadora-de-integrales.com/> son

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 3.10437901786; \quad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 0.87308424265.$$

Figura 2. La interfaz de cálculo de la integral $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con la herramienta https://www.calculadora-de-integrales.com

The screenshot shows the 'Result' page of the online calculator. At the top, it says 'Done! See the result further below. In order to not miss anything, please scroll all the way down.' Below this are icons for copy, search, and zoom. A legend indicates that a green checkmark means 'Check your own answer' and a green document icon means 'Export the expression (e. g. LaTeX)'. The 'YOUR INPUT:' section shows the function $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ entered into the input field. Below the input field is a 'Simplify' button. The 'DEFINITE INTEGRAL:' section shows the integral $\int_0^1 f(x) dx =$ with the limits 0 and 1. Below this is the 'Approximation:' result, which is 3.10437901785504. At the bottom, a note states: 'Note: The approximation was obtained through numerical integration. The estimated absolute error is $1.044497821567347 \cdot 10^{-12}$.' There is another 'Simplify' button at the very bottom.

Figura 3. La interfaz de cálculo de la integral $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con la herramienta <https://www.calculadora-de-integrales.com>



Sumando esos valores, se obtiene la y aproximación

$$I_f \approx 3.9774633.$$

`NIntegrate[Exp[-x] / Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}, Exclusions -> 1]`

del sistema de computación algebraica Mathematica (Figura 4), de nuevo se obtienen las aproximaciones

Utilizando el código

$$NIntegrate[Exp[x] / Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}, Exclusions -> 1] \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 3.10437901786; \quad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 0.87308424265; \quad I_f \approx 3.9774633.$$

Figura 4. La interfaz de cálculo de los valores principales de Cauchy de las integrales impropias $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ y $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con la aplicación de computación algebraica Mathematica v.13.1



El lenguaje de Wolfram del sistema de computación algebraica selecciona automáticamente un algoritmo de integración numérica, el cual cumple con criterios de eficiencia mínimos necesarios para obtener las aproximaciones requeridas. (Loustau, 2017).

Se obtuvieron los mismos valores aproximados para las integrales impropias $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ y I_1

utilizando el código

```
>J:=int(exp(x) | sqrt(1-x^2),x=0..1);
>evalf(%,20);
>int(exp(-x) | sqrt(1-x^2),0..1);
>evalf(%,20);
```

del sistema de computación algebraica MAPLE, que fue desarrollado por la Universidad de Waterloo en Canadá (Figuras 5 y 6).

Figura 5. La interfaz de cálculo de la integral $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con la herramienta Maple2024.

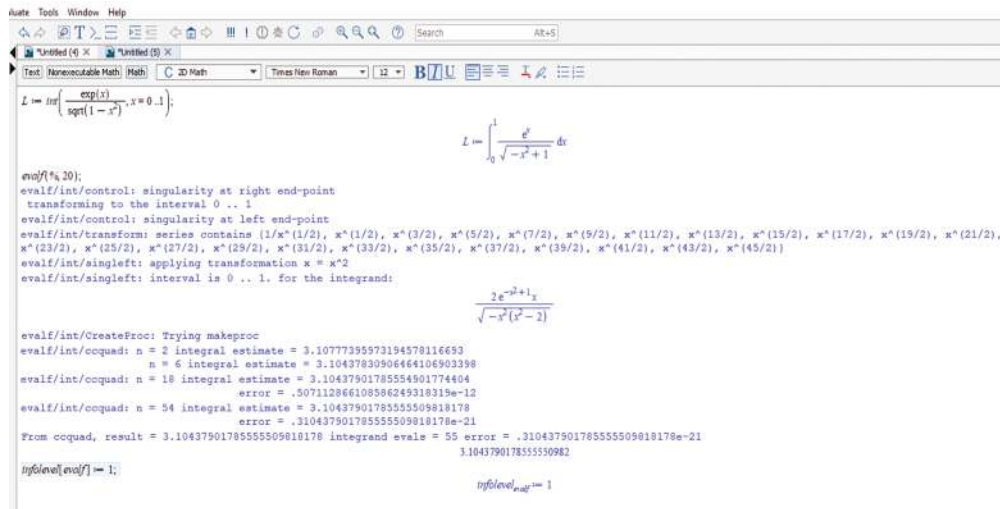
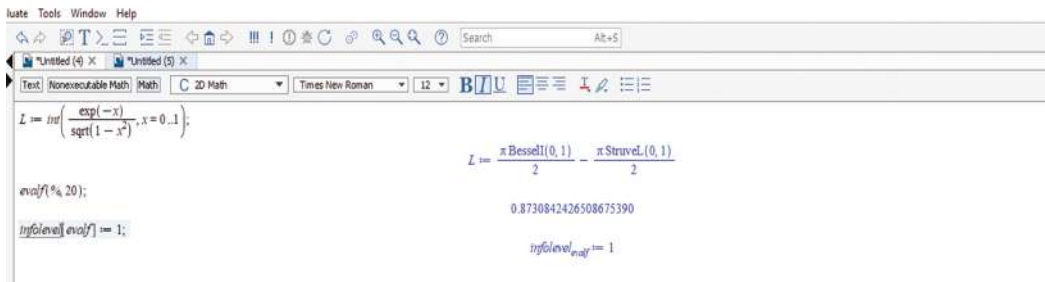


Figura 6. La interfaz de cálculo de la integral $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con la herramienta Maple2024.



Los valores más precisos generados con este código fueron

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 3.1043790178555550982$$

y

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 0.8730842426508675390 .$$

Para hallar la aproximación numérica para la integral impropia $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, el sistema de computación algebraica MAPLE mapeó la singularidad en $x=1$ a otra singularidad en $\omega=0$ mediante la sustitución $x=1-\omega^2$, de esa manera reemplazando esa integral impropia por la integral

$$-\int_1^0 \frac{e^{1-\omega^2} 2\omega d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+1}} = \int_0^1 \frac{e^{1-\omega^2} 2\omega d\omega}{\sqrt{2\omega^2-\omega^4}} .$$

La aproximación para dicha integral fue hallada mediante el paquete de algoritmos numéricos ccquad, en el cual se escoge el método numérico óptimo para generar aproximaciones para integrales impropias sobre intervalos finitos (Geddes y Fee, 1992). El error en esa aproximación tiene el valor de $0.3104 \cdot 10^{(-21)}$ como cota superior.

Para hallar la aproximación numérica para la integral impropia $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, el sistema de computación algebraica MAPLE pudo expresar el valor de convergencia L de esa integral de la forma

$$L=J_0(1)+H_0(1),$$

donde $J_0(1)$ denota la solución de la ecuación diferencial de Bessel (1) correspondiente a $\gamma=0$

y $x=1$, y $H_0(1)$ denota la solución de la ecuación diferencial de Struve

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^{n+1}}{(2n-1)!!}$$

con $n=0$ y $x=1$ (Groux y Soulat, 2009). Cabe observar que la ecuación de Bessel es una versión homogénea de la de Struve. Los valores numéricos de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Bessel han sido hallados con mucha precisión, lo que demuestra que el error en la aproximación para el valor de convergencia de la integral impropia $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ es relativamente bajo.

Utilizando el mismo procedimiento, se calcularon las siguientes aproximaciones para los valores de convergencia de las integrales impropias restantes:

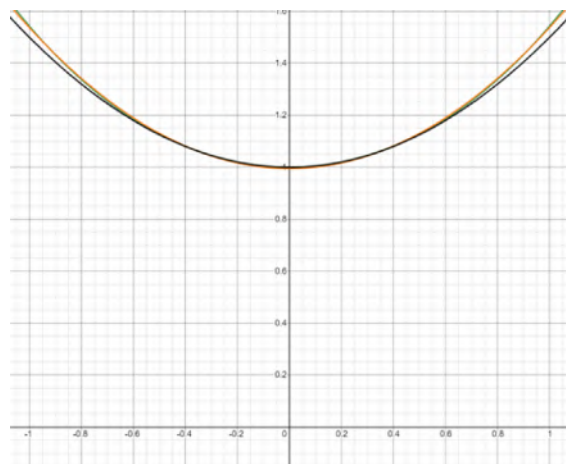
$$I_2 \approx 2.2019636; I_3 \approx 1.7058555.$$

Sustituyendo esos valores en las fórmulas (11) y (12), podemos hallar los tres primeros coeficientes de Chebyshev de la función w , deduciendo que

$$w(x) = 1.26606T_0(x) + 0.27148T_2(x) + 0.00547T_4(x) + \dots (14)$$

La comparación de los niveles de precisión de las sumas parciales $C_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_{2k} T_{2k}(x)$ de la serie (14) con el de las sumas parciales $M_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ de la serie de Maclaurin correspondiente en aproximar la función w sobre el intervalo $-1 < x < 1$ se presentan en la figura 7.

Figura 7. La gráfica de la función hiperbólica $w(x)=cosh(x)$ (color verde), su aproximación por polinomio de Chebyshev $C_2(x)$ (color anaranjado) y su aproximación por polinomio de Maclaurin $M_2(x)$ (color negro) elaborada con la calculadora gráfica www.desmos.com.



Examinando la figura 7, se confirma que el polinomio de segundo grado obtenido al truncar la serie (14) después de dos términos aproxima a la función w mejor que la suma parcial de la serie de Maclaurin correspondiente sobre el intervalo $-1 < x < 1$.

Al truncar la serie (14) o la serie de Maclaurin $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ para obtener polinomios de grado mayor o igual a 4, las gráficas correspondientes no pueden ser distinguidas fácilmente de la función original. Sin embargo, las ventajas numéricas de las series de Chebyshev pueden ser verificadas comparando los valores obtenidos de las sumas parciales $C_{2m}(x)$ y $M_{2m}(x)$ por varios valores de x y m . Tales valores han sido enumerados en la Tabla 1 utilizando las sumas parciales

$$C_4(x) = 1.26606 + 0.27148(2x^2 - 1) + 0.00547(8x^4 - 8x^2 + 1),$$

$$M_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

y

$$M_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6.$$

Tabla 1: Aproximaciones de la función hiperbólica por polinomios de Chebyshev de cuarto grado, polinomios de Maclaurin de cuarto grado y polinomios de Maclaurin de sexto grado calculados con la herramienta www.symbolab.com

Variable independiente x	Valor exacto de la función $\cosh(x)$	Aproximación con polinomios de Chebyshev de cuarto grado $C_4(x)$	Aproximación con polinomios de Maclaurin de cuarto grado $M_4(x)$	Aproximación con polinomios de Maclaurin de sexto grado $M_6(x)$
0.8	1.33743	1.33746	1.33706	1.33743
0.9	1.43308	1.43311	1.43234	1.43307
0.99	1.53140	1.53135	1.53007	1.53138

Examinando los valores en la Tabla 1, es evidente que el polinomio $C_4(x)$ produce aproximaciones más precisas sobre el intervalo $0.8 \leq x \leq 0.99$ que el polinomio $M_4(x)$.

El polinomio de sexto grado $M_6(x)$ genera aproximaciones cuyo nivel de precisión es levemente superior al del polinomio $C_4(x)$. Sin embargo, esa mejora no es significativa y requiere la incorporación de un término de sexto grado.

El alto nivel de eficiencia algorítmica de los polinomios de Chebyshev en implementar sistemas del procesamiento de señales y de interpolación numérica sigue contribuyendo a innovaciones en esos campos (Feng et al, 2021), (Mishuk et al, 2022) y (Vlasic et al, 2019).

Discusión

El primer encuentro con las series en los cursos de cálculo puede generar la percepción equivocada de que las sumas parciales de las series de Taylor de una función representan el polinomio óptimo para aproximar una función sobre un intervalo determinado. Los ejercicios propuestos y resueltos en este artículo confirman que las sumas parciales de las series Taylor de una función no necesariamente son óptimas; se ha demostrado las ventajas de otras representaciones. Esas observaciones coinciden con la verificación de que los productos parciales de las representaciones

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

y

$$\cos(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

generan aproximaciones de mayor precisión que los polinomios del mismo grado obtenidos al truncar la serie de Maclaurin de la función correspondiente (Savoie, 2020) y (Savoie, 2022).

De manera similar, la representación de una función transcendental o radical por una serie de expresiones racionales puede ser de gran utilidad en producir aproximaciones numéricas (Savoie, 2023) y (Savoie, 2024).

Como se ha ilustrado mediante varios ejemplos, la representación de funciones de una variable real por series de Chebyshev puede ser ventajosa si la función es determinista y aperiódica. La aplicación directa de este procedimiento para funciones aleatorias o periódicas no es posible, dado que

las funciones $T_n(x)$ carecen de aleatoriedad o periodicidad. Los métodos que fueron esbozados en este artículo se utilizan al resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales en determinados modelos económicos, aunque la convergencia de las series de Chebyshev correspondientes está restringida a subconjuntos sobre los cuales las soluciones de dichas ecuaciones son aperiódicas (Mosiño, 2012).

Se ha estudiado la factibilidad de modelar fenómenos aleatorios por funciones de Chebyshev o Hermite de una variable aleatoria (Bogachev, 2022). De manera similar, una función periódica y continua en trozos puede ser analizada mediante las series de Chebyshev y la transformada discreta de Fourier sobre cada subintervalo correspondiente (Demagnet y Ying, 2010). También se han logrado avances significativos en el procesamiento de imágenes de tomografía utilizando la interpolación con polinomios de Chebyshev (Marinakos et al, 2023).

El avance de nuevos algoritmos relacionados con el procesamiento de información ha incrementado significativamente el uso de las funciones de Chebyshev. El auge de la ciencia de los grandes datos ha creado la necesidad de comprimir matrices de datos cuyas dimensiones son de gran magnitud; los algoritmos basados en los polinomios de Chebyshev facilitan dicha tarea de compresión de matrices (Kalenchuk-Porkhanova, 2020). Los polinomios de Chebyshev también son de suma importancia en gestionar el enorme volumen de cálculos requeridos en la cosmografía (Capozziello et al, 2018). De manera similar, los polinomios de Chebyshev permiten a los analistas identificar las características esenciales de bases de datos de gran envergadura (Daltrophe, 2018).

El uso de las ecuaciones integro-diferenciales es frecuente en modelos macroeconómicos (Achdou et al, 2014). Los métodos operativos utilizados para resolver ecuaciones integro-diferenciales lineales y deterministas incluyen la representación

de las soluciones por series infinitas de funciones especiales (Agachev y Pershagin, 2017), (Assanova y Nurmukanbet, 2021), (Levy, 2023) y (Savoie, 2010). Sin embargo, resolver ecuaciones integro-diferenciales semilineales requiere el uso de métodos de optimización en un espacio de Banach (Bensalem et al, 2022). Los modelos económicos de gran envergadura que incorporan elementos de memoria dinámica de largo plazo pueden precisar el uso de ecuaciones integro-diferenciales cuya solución requiere el cálculo fraccional, que se caracteriza por los operadores diferenciales de orden fraccional (Tarasov y Tarasova, 2018).

Conclusiones

En el primer encuentro con las series en los cursos de cálculo, se observó que se genera una percepción equivocada por parte de los universitarios, respecto a que las sumas parciales de las series de Taylor de una función, representan el polinomio óptimo para aproximar una función sobre un intervalo determinado.

Los ejercicios propuestos y resueltos en este artículo, confirman que las sumas parciales de las series de Taylor de una función no necesariamente son óptimas; se logró demostrar las ventajas de otras representaciones, al aproximar a varias funciones transcendentales con mayores niveles de precisión utilizando polinomios con un número igual (o menor) de términos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la decanatura de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad San Francisco Xavier de Chuquisaca y a la dirección del Departamento de Matemáticas, Informática y Computación Forense de la Universidad de Commonwealth de Pennsylvania por haber promovido los intercambios académicos entre docentes de ambas instituciones educativas.

Bibliografía

- Adchou, Y., Buera, F., Lasry, J.-M., Lions, P. L. y Moll, B. (2014). Partial Differential Equation Models in Macroeconomics. Proceedings of the Royal Society. doi <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0397>
- Agachev, Y.R., Pershagin, M.Y. (2017). Well-posed integro-differential equations in a new pair of weight-free Sobolev spaces. Russian Mathematics. 61, 71–75. <https://doi.org/10.3103/S1066369X17080084>
- Assanova, A. y Nurmukanbet, Sh. (2021). A solution to a boundary-value problem for integro-differential equations with weakly singular kernels. Russian Mathematics. 11, 1–13. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21110013>
- Bensalem, A., Salim, A., Benchohra, M. y N'Guerekata, G. (2022). Functional Integro-Differential Equations with State-Dependent Delay and Non-Instantaneous Impulsions: Existence and Qualitative Results. Fractal and Fractional. 6 (10), 615. <https://doi.org/10.3390/fractalfract6100615>
- Berthelin, F. (2017). Équations Différentielles. Collection Enseignement des Mathématiques. Paris, France: Édition Cassini.
- Boelkins, M. and Wells, M. (2007). On the Ratio of Vectors of Chebyshev and Equispaced Polynomials. Missouri Journal of Mathematical Sciences. (19) 1. doi [10.35834/mjms/1316092233](https://doi.org/10.35834/mjms/1316092233)
- Bogachev, A. (2022). Chebyshev-Hermite Polynomials and Distributions of Polynomials in Gaussian Random Variables. Theory of Probability & its Applications. (66), 4. doi <https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990617>
- Boyce, W. & DiPrima, R. (2005). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 8th edition. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Capozziello S., D'Agostino, R. y Luongo, O. (2018). Cosmographic Analysis with Chebyshev Polynomials. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 476, Issue 3, pp. 3924–3938. <https://doi.org/10.1093/mnras/sty422>
- Chaudhary, P., Gupta, V. y Pachori, R. (2023). Fourier-Bessel Representation Representation for Signal Processing: A review. Association of Computing Machinery Digital Library. doi <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.103938>
- Daltrophe, H., Dolev, S. y Lotker, Z. (2018). Big Data Interpolation Using Functional Representation. Acta Informatica 55, 213–225 <https://doi.org/10.1007/s00236-016-0288-8>
- Deal, J. y Jiang, B. (2018). Basics of Bessel Functions. Portland State University. Paper 546. doi <https://doi.org/10.15760/honors.552>.
- Demagnet, L. y Ying, L. (2010). On Chebyshev Interpolation of Analytic Functions. MIT Working Papers. doi <https://math.mit.edu/icg/papers/cheb-interp.pdf>
- Demeyer, J. (2011). Sage 9.3 beta9 Reference Manual: Symbolic Calculus»Numerical Integration. Stanford University. doi <http://sporadic.stanford.edu/reference/calculus/sage/calculus/integration.html>
- Fadel, M.; Raza, N.; Du, W.-S. (2023). Characterizing q-Bessel Functions of the First Kind with Their New Summation and Integral Representations. Mathematics. (11), 3831. <https://doi.org/10.3390/math11183831>
- Fay, T. y Kloppers, H. (2010). The Gibbs Phenomenon for Fourier-Bessel Series. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. doi <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739021000053936>
- Feng, S., Wang, B. and Chen, C. (2021). Chebyshev Polynomial Broad Learning System. 8th International Conference on Information. doi [10.1109/ICC553909.2021.9721962](https://doi.org/10.1109/ICC553909.2021.9721962).
- Geddes, K. y Fee, G. (1992). Hybrid Symbolic-Numeric Integration in Maple. Symbolic Computation Group. Department of Computer Science. University of Waterloo. Canadá. doi [143242.143262 \(acm.org\)](https://doi.org/10.1145/143242.143262)

- Gourdon, X. (2020). *Les Maths en Tête-Analyse*, 3e Edition. Toulouse, France. Librairie Eyrolles.
- Groux, R. y Soulat, P. (2009). *Les Fonctions Spéciales Vue par les Problèmes*. Paris, France: Éditions Cepadués.
- Ivy, K. (2018). Polynomial Interpolation of Functions: Introducing Chebyshev Polynomials in a CAS Laboratory. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, (25) 1, 27-34.
- Levy, P. (2023). *Sur les Equations Integro-Differentielles Définissant des Fonctions de Lignes*. Paris, France. Éditions Galimart.
- Kalenchuk-Porkhanova, A. (2020). Best Chebyshev Approximation for Compression of Big Information Arrays. *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference on Information Technology and Mathematical Methods in Economics and Management*. Moscú, Rusia.
- Loustau, J. (2017). *Elements of Numerical Analysis with Mathematica*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Marinakakis, V., Focas, A., Kastis, G. y Pronotario, N. (2023). Chebyshev Interpolation Using Almost Equally Spaced Points and Applications in Emission Tomography. *Mathematics*, (11) 23 doi <https://doi.org/10.3390/math11234757>
- Merino, J. C. (2018). Lissajous Figures and Chebyshev Polynomials. *The College Mathematics Journal*, 34(2), 122-127. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07468342.2003.11921995>
- Mosiño, A. (2012). Using Chebyshev Polynomials to Approximate Partial Differential Equations: A Reply. *Computational Economics*. 39, 13-27. <https://doi.org/10.1007/s10614-010-9222-2>
- Mishuk, A., Shapovalov, D., Voloshyna, T, Voloshyn, N. and Karakhanov, D. (2022). Orthogonal Chebyshev Polynomials in Signal Processing. 2022IEEE4thInternationalConference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), doi [10.1109/ATIT58178.2022.10024191](https://doi.org/10.1109/ATIT58178.2022.10024191).
- Polynômes de Chebyshev. (2022). Visto 25 de febrero, 2022 de website de Université Virtuelle de Tunis <https://www.uvt.rnu.tn/resources-uvt/cours/analyse-hilbertienne/bases-hilbertienne/chap2/sec3/node1.html>
- Savoye, P. (1996). Equimeasurable Rearrangements of Functions and Fourth Order Boundary Value Problems, volume 26, 1996, Rocky Mountain Journal of Mathematics ISSN 0035-7596, 26(1) 281-294.
- Savoye, P. (2010). On the Importance of Integral Equations and Green's Functions in the Undergraduate Mathematics Curriculum, *Primus*, 20(7): 617-625. ISSN: 1051-1970 print / 1935-4053 online.
- Savoye, P. (2015). A Classroom Note on Trigonometric Series in Calculus. *Mathematics and Computer Education Journal*, 2015. Volume 49, No. 2, pp. 177-182. ISSN: 0730 - 8639.
- Savoye, P. (2020). Introducing Calculus Students to the Infinite Product Representations of Functions. *Mathematics AMATYC Educator* Volume 12, Number 1, Fall 2020, pp. 52-57.
- Savoye, P. (2022). Introducing Calculus Students to the Infinite Product Representations of Functions: Additional Explorations. *Mathematics AMATYC Educator*, Volume 13, Number 3, Spring 2022, pp. 22-26.
- Savoye, P. (2023). Introducing Calculus Students to the Representation of Functions by Infinite Series of Rational Functions. *Mathematics AMATYC Educator*, Volume 14, Number 3, Spring 2023, pp. 34-37.
- Savoye, P. (2024). Applications of Series in Calculus: Approximating Radical Functions Through Rational Expressions. *Missouri J. Math. Sci.* 36 (1) III - 120, May 2024. <https://doi.org/10.35834/2024/3601111>.
- Shen, W. (2019). *An Introduction to Numerical Computation*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Stakgold, I. (1979). *Green's Functions and Boundary Value problems*. New York, NY: John

Wiley & Sons.

Tarasov, V. y Tarasova, V. (2018). Macroeconomic Models with Long Dynamic Memory: Fractional Calculus Approach. *Applied Mathematics and Computation*, (338) 466-486. doi <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.06.018>

Tchaptié, Y. (2024). Introduction Aux Equations Aux Dérivées Partielles: COURS DE

MASTER lère année. Ngaoundéré, Camerún: Faculté des Sciences, Université de Ngaoundéré.

Vlasic, T., Ivankovic, J., Tafro, A and Sersic, D. (2019). Spline-Like Chebyshev Polynomials Representation for compressed Sensing. 2019 11th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), IEEE, doi [10.1109/ISPA.2019.8868926](https://doi.org/10.1109/ISPA.2019.8868926).