Construcción, demostración y aplicación de los tres números irracionales más famosos

Mamani Huanca H.[a]

a. Licenciado en Matemáticas (U.A.T.F), Docente de la Facultad de Ingeniería Civil (U.S.F.X.) del área de matemáticas, Destacamento 317, Ex Campus REFISUR, 573, Sucre, Bolivia. E-mail: mamani.humberto@usfx.bo

Recibido: Aceptado: Publicado:

RESUMEN

En este trabajo se estudia cuidadosamente tres aspectos fundamentales que hacen del mismo un contenido y desarrollo exquisito. Inicialmente en lo que refiere a la construcción geométrica y/o numérica de cada uno los tres números irracionales escogidos, se toma criterios plenamente establecidos y probados con anterioridad, como también métodos propios del autor. Luego, en lo referente a la demostración sobre la irracionalidad de los tres números, se toma en cuenta resultados previos para ser aplicados en la demostración principal, todo el procedimiento se basa en métodos que desarrolla el autor basado principalmente en el campo del Análisis Matemático. Como tercer aspecto es la aplicación práctica de los tres números irracionales famosos; estas aplicaciones se presentan en la misma Matemática, en la ingeniería, la Física, Biología, Estadística y demás disciplinas del conocimiento. En cada uno de los aspectos -construcción, demostración y aplicación- se presenta una resolución y explicación clara en su planteamiento resolutivo y tomando como base la representación gráfica para una mayor objetividad del procedimiento matemático.

Palabras clave: Número irracional, número Pi, número de Euler, número áureo.

ABSTRACT

In this work, three fundamental aspects that make it an exquisite content and development are carefully studied. Initially, with regard to the geometric and/or numerical construction of each of the three irrational numbers chosen, fully established and previously tested criteria are used, as well as the author's own methods. Then, with regard to the demonstration of the irrationality of the three numbers, previous results are taken into account to be applied in the main demonstration, the whole procedure is based on methods developed by the author based mainly on the field of Mathematical Analysis. As a third aspect is the practical application of the three famous irrational numbers; these applications are presented in Mathematics itself, in Engineering, Physics, Biology, Statistics and other disciplines of knowledge. In each of the aspects -construction, demonstration and application- a clear resolution and explanation is presented in its resolutive approach and based on the graphic representation for a greater objectivity of the mathematical procedure.

Key words: Irrational number, Pi number, Euler number, golden ratio.

INTRODUCCIÓN

Se sabe que un número se denomina irracional cuando no es posible escribirlo como un racional, es decir, como una fracción de números enteros

$$p/q,\ q \neq 0 \qquad (1)$$

También se dice que todo número irracional es todo número real con su parte decimal no exacta, ni periódica.

Ejemplo:

$$\pi\!: = 3.14159265358979...$$
Número Pi

$$e\!: = 2.71828182845904...$$
Número de Euler

$$\varphi\!: = 1.61803398874989...$$
Número áureo

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309...$$
Raíz de 2

$$\log 3 = 0.47712125471966...$$
Logaritmo decimal de 3. Etc.

Se considera del ejemplo anterior a tres primeros números irracionales notables de la Ciencia Matemática en lo que refiere a la Teoría de Números, a saber, el renombrado número Pi (π), el importante número de Euler (e) y el enigmático número Áureo (φ), es desde ya un importante inicio para adentrarse en el mundo de los números y estudiarlos a partir de su construcción, prueba de su irracionalidad y finalmente mostrar sus múltiples aplicaciones prácticas.

MATERIALES Y MÉTODOS

El trabajo se centra principalmente sobre el estudio de los números irracionales, para lo cual se escogió al número Pi, el número de Euler y el áureo, que brindan una riqueza matemática muy interesante y desafiante a la vez. Los métodos utilizados por el autor son constructivos, deductivos, inductivos y analíticos propios de la Ciencia Matemática y acompañados de esquemas gráficos que brindan una mayor objetividad a los aspectos planteados al inicio.

NÚMERO PI - π

Tabla 1. Ficha técnica de π

Nombre:	π proviene de las palabras griegas "periferia" y "perímetro" de un círculo.
Origen:	· 2000 a.C. los babilonios tuvieron ya la relación. · 225 a.C. Arquímedes, inició su teoría matemática. · 1706, William Jones, usó su símbolo por primera vez. · 1737, Leonhard Euler, la popularizó.
Valor aprox.:	$\pi\!: = 3.14159265358979...$
Uso:	Muy frecuente en Matemáticas, Física e Ingeniería.

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE PI (π)

1. Empezar con un cuadrado de lado "l", se traza una circunferencia de radio = 1 y diámetro = 2.

Por el Teorema de Pitágoras:

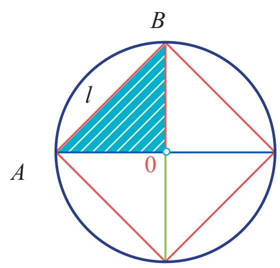
$$l^2 = 1^2 + 1^2 \longrightarrow l = \sqrt{2}$$

Perímetro,

$$p = 4\sqrt{2}$$

Calculando Pi:

Figura 1: Cuadrado inscrito



$$\pi = \frac{p}{d} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \approx 2.828427... \qquad (2)$$

2. Octágono de lado "l", determinando su longitud:

$$l = \overline{AB}$$

$$\overline{OA} = 1$$

$$\overline{BP} = 1 - \overline{OP} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \quad \sqrt{2}}{2}$$

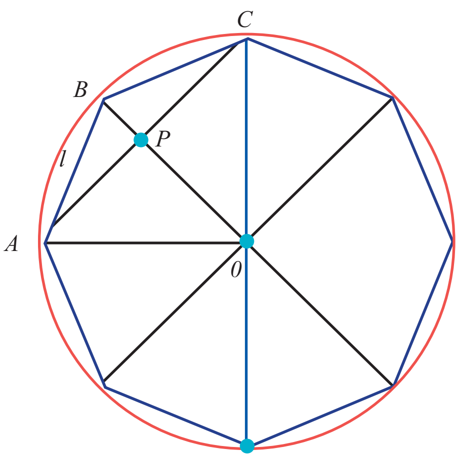
$\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\overline{OP}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABP$:

$$l^2=\overline{BP}^2+\overline{AP}^2$$

$$l=\sqrt{\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Figura 2: Octágono inscrito



Perímetro,

$$p=8\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Calculando Pi:

$$\pi=\frac{p}{d}=\frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\approx 3.061467... \qquad (3)$$

3. Hexadecágono de lado "l", determinando su longitud:

$$\overline{OA}=1$$

$$\overline{AC}=\sqrt{2-\sqrt{2}};\ \overline{AP}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\overline{BP}=1+\overline{OP}$$

Para $\overline{OP}$, se aplica el Teorema de Pitágoras en $\triangle OAP$:

$$\overline{OA}^2=\overline{AP}^2+\overline{OP}^2$$

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{1^2-\left[\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{2}\right]^2}$$

$$\overline{OP}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \longrightarrow\ \overline{BP}=1-\overline{OP}$$

$$\overline{BP}=1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Determinando $l=\overline{AB}$, en el $\triangle OPB$:

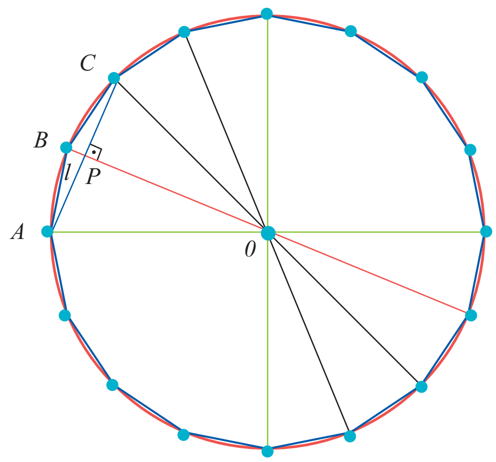


Figura 3: Hexadecágono inscrito

$$l^2=\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{PB}^2$$

$$l=\sqrt{\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right]^2+\left[\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right]^2}$$

$$l=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Calculando Pi:

$$\pi=\frac{p}{d}=\frac{16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\approx 3.121445... \qquad (4)$$

De manera general y modificando el número de lados del polígono se tiene la tabla:

Tabla 2. Aproximación del valor de Pi.

l	*l* mod.	Medida de *l*	Valor aproximado
4	2^0x4	$\sqrt{2}$	л ≈ 2.828427...
8	2^1x4	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	л ≈ 3.061467...
16	2^2x4	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	л ≈ 3.121445...
32	2^3x4	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	л ≈ 3.136548...
64	2^4x4	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	л ≈ 3.140331...
$nl=2^n$	2^nx4	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}}$	л ≈ 3.14159265...

DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE PI (л)

Previo a la demostración de la irracionalidad de л, se enuncian los siguientes resultados para aplicarlos por el método de fracciones continuas.

LEMA 1. Se considera la fracción continua generalizada,

$$y=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\dots}}}} \qquad (5)$$

Donde a_k y b_k son número enteros no nulos para todo k Є. Si para cada se tiene que $|a_k|<|b_k|$ a partir de un cierto valor de k, entonces y es irracional.

LEMA 2. Si x es un número racional, entonces $\tan(x)$ puede expresarse en forma de fracción continua de la siguiente manera:

$$\tan(x)=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cfrac{x^2}{11\quad\dots}}}}}} \qquad (6)$$

OBSERVACIÓN. Se tiene el hecho; como $\tan\left[\frac{\pi}{4}\right]=1$, se deduce que π no puede ser racional, pues si lo fuera, también lo sería $\left[\frac{\pi}{4}\right]$ y, por el Teorema que se enunciará, su tangente debiera ser irracional, y como 1 no es irracional, se llega a una contradicción.

TEOREMA DE LAMBERT. Si $x\neq 0$ es un número irracional, entonces $\tan(x)$ es irracional.

Demostración:

Sea $x=\frac{p}{q}$ un número racional distinto de cero. Por el Lema 2, se tiene:

$$\tan\left[\frac{p}{q}\right]=\cfrac{p}{q-\cfrac{p^2}{3q-\cfrac{p^2}{5q-\cfrac{p^2}{7q-\cfrac{p^2}{9q-\cfrac{p^2}{11q\quad\dots}}}}}} \qquad 7)$$

Aplicando el Lema 1, se escribe en su notación,

$a_1=p,\quad a_k=-p^2$ para $k\geq 2$

$b_k=(2k-1)\,q$ para $k\geq 1$

Como $b_k\to\infty,\ k\to\infty,$ y a_k es constante, es claro que a partir de cierto valor de k se tendrá que, $|a_k|<|b_k|$

y, por tanto, se concluye que $\tan\left[\frac{p}{q}\right]$ es irracional.

Aplicando la Observación, se concluye que $\frac{\pi}{4}$ es irracional, lo que confirma que π es irracional.

APLICACIÓN DE PI (π)

El número π es el número irracional más importante de la Geometría, también se encuentra en una variedad de representaciones objetivas de la ingeniería, ya sea en sus fórmulas que describen propiedades y procedimientos propios de este campo:

- Constante esencial para garantizar la precisión del cálculo de una circunferencia de las tuberías.

- Pandeo de columnas en una estructura.
- La curvatura de los cables de un puente.
- Estimar el volumen de estructuras cilíndricas o pilotes.

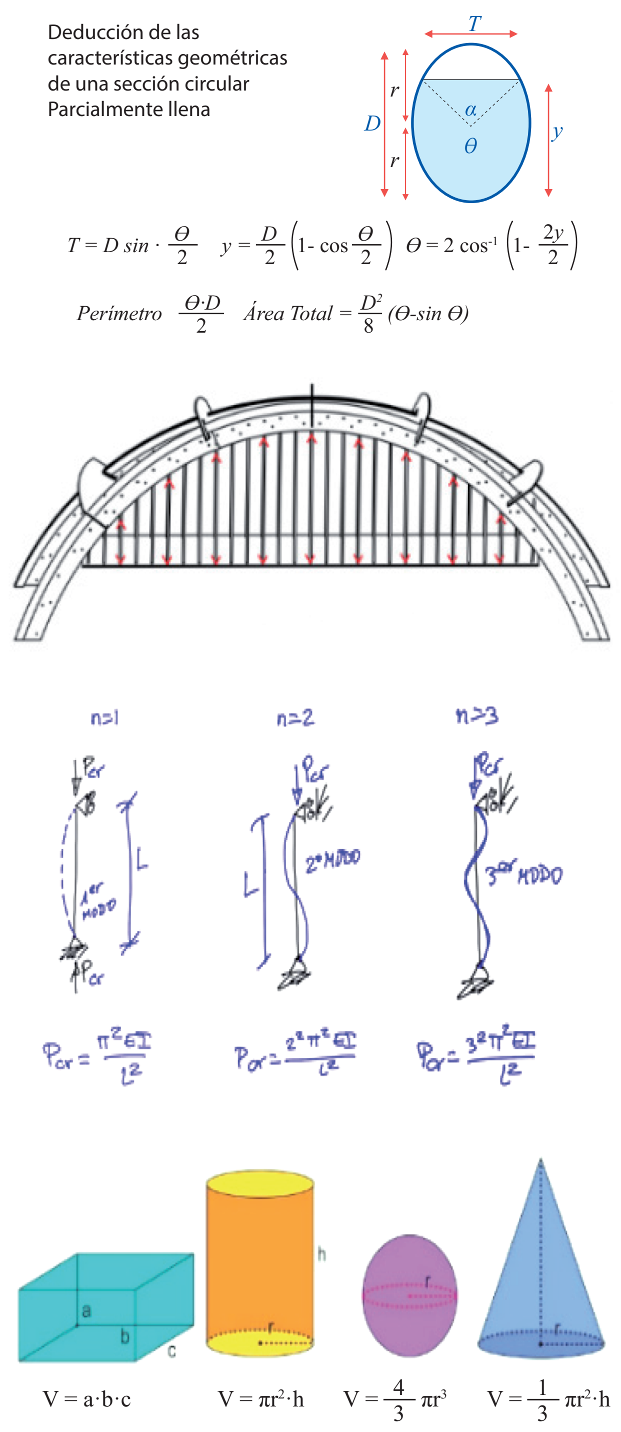


Figura 4: Aplicaciones prácticas y geométricas del número Pi

NÚMERO DE EULER - e

Tabla 3. Ficha técnica de e

Nombre:	e en honor al matemático Leonhard Euler (1707 – 1783).
Origen:	· 1614, John Napier introdujo el concepto de logaritmos, sentando las bases para el surgimiento del número e. · El verdadero protagonista de esta historia fue el Leonhard Euler, quien buscaba calcular el interés compuesto de una manera precisa.
Valor aprox.:	$e = 2.71828182845904...$
Uso:	Como base de las funciones exponenciales y logarítmicas y se utiliza en muchas áreas de matemáticas, ciencias e ingeniería.

CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO DE EULER (e)

Se basa en el siguiente problema que refiere a interés compuesto. "Una persona pide prestado Bs. 1 a su amigo, con la condición del 100% de interés anual, al final del año el amigo tiene Bs. 2. Nuevamente esta persona pide al amigo un nuevo préstamo, pero con la condición de los 50% de interés pagaderos en dos cuotas semestrales, al final del año el amigo tiene Bs. 2.25. Así, se sigue haciendo el préstamo trimestral, cuatrimestral, mensual. ¿Hacia qué cantidad se aproxima el monto total después de realizar este procedimiento?".

Se desarrolla lo siguiente:

- 100% interés anual:

$$\left[1+\frac{1}{1}\right]^{1} = 2$$

- 50% interés semestral:

$$\left[1+\frac{1}{2}\right]^{2} = 2.25$$

- $\frac{100}{3}\%$ interés cuatrimestral:

$$\left[1+\frac{1}{3}\right]^{3} \approx 2.3704...$$

- $\frac{100}{4}\%$ interés cuatrimestral:

$$\left[1+\frac{1}{4}\right]^{4} \approx 2.4414...$$

- $\frac{100}{12}\%$ interés mensual:

$$\left[1+\frac{1}{12}\right]^{12} \approx 2.6130...$$

- $\frac{100}{365}\%$ interés diario:

$$\left[1+\frac{1}{365}\right]^{365} \approx 2.7145...$$

- $\frac{100}{8760}\%$ interés por hora:

$$\left[1+\frac{1}{8760}\right]^{8760} \approx 2.7181...$$

De manera general:

- $\frac{100}{n}\%$ interés para n?:

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} \approx 2.7182818284...$$

Aplicando límites:

$$\lim_{n \to \infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} = e \quad (8)$$

Respondiendo a la pregunta del problema: la cantidad total se aproxima al número de Euler.

DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE (e)

Suponga que e sea racional:

$$\frac{p}{q} = e, \quad p \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$\frac{p}{q} = e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + ...$$

$$\frac{p}{q} = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ...\right] + \left[\frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + ...\right]$$

$$q!\left[\frac{p}{q} = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ...\right] + \left[\frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + ...\right]\right]$$

$$p(q^{-1})! = \left[q! + q! + \frac{q!}{2!} + ... + 1\right] + \left[+\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + ...\right]$$

Se observa que $p(q^{-1})! \in$, lo que implica que la suma del miembro de la derecha debe ser natural, el primer paréntesis es evidente que es natural, se debe probar que el segundo lo es.

Sea:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + ... < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...$$

Aplicando la fórmula de una progresión geométrica al lado derecho:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ... = \frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q}{q+1}} = \frac{1}{q}$$

Entonces se tiene que:

$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + ... < \frac{1}{q}$, falso, no existe un número natural más pequeño que 1.

Así, $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + ...$ no es un número natural, lo que contradice que

$p(q^{-1})! \in \cdot$

Por tanto: $\frac{p}{q} = e$ no puede ser racional, e es un número irracional.

APLICACIONES DEL NÚMERO DE EULER (e)

El número e es el número más importante del Cálculo, por tanto sus aplicaciones son múltiples:

- En Ing. Civil, en el cálculo estructural: Ayuda a diseñar estructuras para evitar el pandeo y a escoger los materiales adecuados.
- En Ing. Aeronáutica: Ayuda a calcular la estabilidad y el rendimiento de aviones no tripulados y aeroplanos.
- En la Biología: se aplica para describir el crecimiento exponencial poblacional bajo condiciones óptimas.

- En la Matemática y la Física: Su utilización es múltiple.

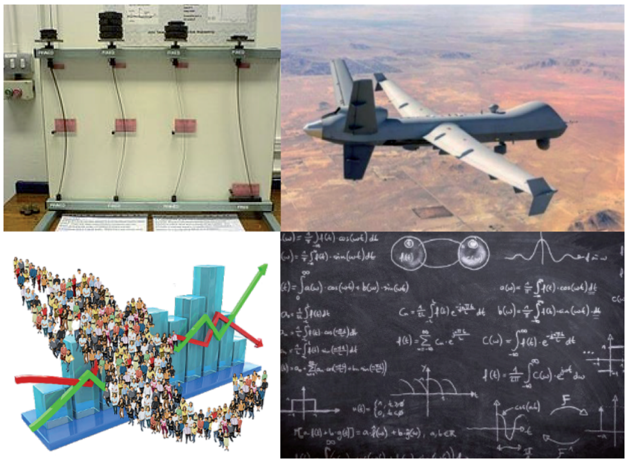


Figura 5: Aplicaciones del número de Euler

NÚMERO DE ÁUREO - φ

Tabla 4. Ficha técnica de φ

Nombre:	φ llamado número de oro, número de Dios, el número de Fibonacci, etc. En honor al escultor griego Fidias.
Origen:	· Descubierto por los griegos, ellos le dieron un tratamiento básicamente geométrico. · Euclides en su obra Elementos uno de los primeros que se refirió a este concepto.
Valor aprox.:	$\varphi = 1.61803398874989...$
Uso:	· Se encuentra en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, caracoles. · En las Matemáticas como fuente de inspiración en la pintura, arquitectura, escultura, ingeniería, diseño gráfico, música, etc.

CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA Y GEOMÉTRICA DEL NÚMERO ÁUREO ($\varnothing$)

Se considera el gráfico:

Figura 6: Proporción para determinar el número áureo

Si la proporción está en la relación:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Se descarta x_2 por ser negativo. Entonces:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi = 1.61803398874989... \qquad (9)$$

Otra forma de aproximarse al número áureo es por medio de la sucesión de Fibonacci, que establece que cada número es la suma de los dos anteriores:

Tabla 5: Sucesión de Fibonacci

$F(0) = 0$
$F(1) = 1$
$F(2) = F(2-1) + F(2-2) = 1$
$F(3) = F(3-1) + F(3-2) = 2$
$F(4) = F(4-1) + F(4-2) = 3$
$F(5) = F(5-1) + F(5-2) = 5$
$\ldots F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

A medida que se avanza en la sucesión de la tabla anterior, la razón entre dos números consecutivos

$\frac{F(n+1)}{F(n)}$ se aproxima a j. Véase:

Tabla 6: Aproximaciones de j

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{5}{3} » 1.66666666...$$

$$\frac{8}{5} = 1.6$$

$$\frac{13}{8}=1.625$$

$$\frac{21}{13} » 1.61538461...$$

$$\frac{233}{144} » 1.61805555...$$

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} » \text{j}$$

Geométricamente se muestra:

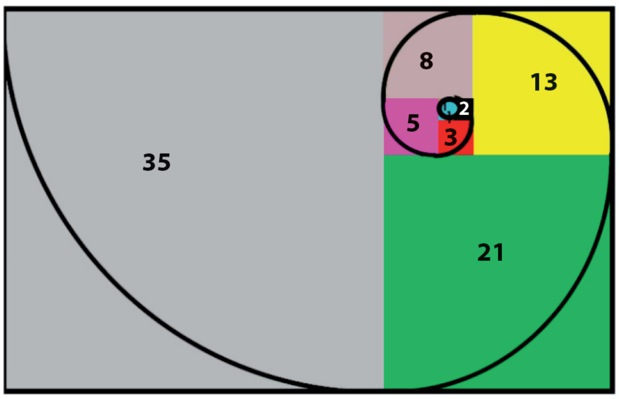


Figura 7: Proporción áurea

DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD DE (j)

Previa a la demostración se presenta dos resultados importantes.

TEOREMA 1. Si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

TEOREMA 2. Sean x Î ¤ , y Î ¤ ^{I} (conjunto de los números irracionales), entonces se cumple:

a) $x+y$ Î ¤ ^{I}.

b) $x \times y$ Î ¤ ^{I}.

Demostración:

De la construcción del número áureo se tiene:

$$\text{j} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Se probará j que sea irracional. Por el Teorema 1, 5 es primo, entonces $\sqrt{5}$ es irracional.

Por el Teorema 2 a), 1 es racional, entonces $1+\sqrt{5}$ es irracional.

Por aplicación del Teorema 2 b), $\frac{1}{2}$ es racional, entonces $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ es irracional.

APLICACIONES DEL NÚMERO ÁUREO (j)

Las aplicaciones del número j son muchas, se muestran algunos:

- En las construcciones antiguas.
- En la ingeniería, escaleras de caracol.
- En la naturaleza.
- En obras de arte.

Figura 8: Representaciones objetivas del número áureo

RESULTADOS

Se alcanza la visualización práctica de los tres números irracionales en su construcción, demostración y aplicaciones varias.

- El número p $=3.14159265358979...$ se construye geométricamente con bastante precisión, la demostración se basa en dos Lemas y el Teorema de Lambert utilizando las fracciones continuas. Finalmente, las aplicaciones se encuentran en las matemáticas, física y en todo campo de la ingeniería.
- El número $e=2.71828182845904...$ se lo construye en función a un problema de interés compuesto con una gran aproximación, la demostración se lo realiza en función a dos resultados importantes, el primero calculando un límite indeterminado, luego por la fórmula de progresión geométrica. Se ve una gran cantidad de aplicaciones ya que el número de Euler es muy utilizado en Cálculo y éste es transversal en el campo de las ciencias e ingeniería.

- El número áureo $j = 1.61803398874989...$ se lo construye algebraicamente resolviendo una ecuación de segundo grado, luego por la sucesión de Fibonacci que construye la proporción áurea, la demostración utiliza dos teoremas previos para que j sea irracional. Ya sea en el arte, las ciencias, la ingeniería, la arquitectura, etc., brindan una notable cantidad de aplicaciones.

CONCLUSIONES

El estudio de estos tres números irracionales notables p, e y j, brinda a los matemáticos y no matemáticos una belleza en su construcción, sobriedad científica en su demostración y objetividad de alto impacto en sus aplicaciones, tanto en matemáticas como en otras disciplinas.

Se hace notar que existen una infinidad de números irracionales que merecen un estudio similar a los mencionados ya que la Ciencia Matemática y el multiverso se encuentra representado por este tipo de números.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dieudonné, J. (1960). Fundamentos de Análisis Moderno. Reverté.
- Enciclopedia Lexus. (2003). La Biblia de las Matemáticas. Letrarte S. A.
- Leveque, W. (1965). Elementary Theory of Numbers. Addison-Wesley Publishing Company.
- Pino, O., Phillips, M. (2018). Calculus Amabilis. Edición Especial. HAT.
- Relos, S. (2007). Cálculo I. 6ta. Edición. Serrano.
- Spivak, M. (1996). Calculus – Cálculo Infinitesimal. Reverté.
- Valente, S. (1998). Diccionario de Matemáticas. 4ta. Edición. Addison Wesley Longman.